**Chủ đề**

6

**CÁC BÀI TOÁN CHỨNG MINH**

**ĐỒNG QUY**

# **F.** **CÁC BÀI TOÁN CHỨNG MINH ĐỒNG QUY**

**MỤC LỤC**

[F. CÁC BÀI TOÁN CHỨNG MINH ĐỒNG QUY 1](#_Toc535271558)

[*Bài tập có giải* 2](#_Toc535271559)

[Một số bài tập tự rèn: 16](#_Toc535271560)

**CÁC PHƯƠNG PHÁP THƯỜNG ĐƯỢC SỬ DỤNG**

**Cách 1.** Lợi dụng định lí về các đường đồng quy trong tam giác

* Sử dụng định lí ba đường cao của tam giác đồng quy tại một điểm
* Sử dụng định lí ba đường trung tuyến của tam giác đồng quy tại một điểm. Điểm đó gọi là trọng tâm của tam giác.
* Sử dụng các định lí: 1.Ba đường phân giác của tam giác đồng quy tại một điểm.
* Giao điểm của hai đường phân giác ngoài nằm trên đường phân giác trong của góc thứ ba.
* Sử dụng định lí ba đường trung trực của tam giác đồng quy tại một điểm.

**Cách 2.** Sử dụng tính chất các đường chéo cắt nhau tai trung điểm mỗi đường của của hình bình hành, hình chữ nhật, hình thoi, hình vuông.

**Cách 3.** Lùi về quen thuộc, chứng minh ba điểm thẳng hàng hoặc giao điểm của hai đường nằm trên đường thẳng thứ ba.

*Chúc các em học sinh học tập tốt!*

# *Bài tập có giải*

**Sử dụng tính chất các đường chéo cắt nhau tai trung điểm mỗi đường của của hình bình hành, hình chữ nhật, hình thoi, hình vuông.**

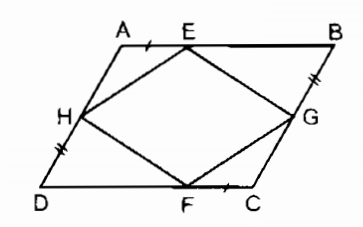
*Bài 1:* Trên hình vẽ bên, cho  là hình bình hành. Chứng minh rằng:

a)  là hình bình hành.

b) Các đường thẳng  đồng quy.

**Hướng dẫn giải**

a) Chứng minh rằng .

b) Gọi  là giao điểm của  và . Tứ giác  có  nên là hình bình hành.****. Suy ra  là trung điểm của .

 là hình bình hành,  là trung điểm của  nên  là trung điểm của .

 là hình bình hành,  là trung điểm của  nên  là trung điểm của .

Vậy  đồng quy tại .

***Lợi dụng các đường đồng quy trong tam giác: đồng quy tại trực tâm, trọng tâm, tâm đường tròn nội tiếp, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác.***

**Bài 2:**Từ một điểm  ở ngoài đường tròn  kẻ các tuyến . Gọi  là đường kính vuông góc với . Các đường thẳng  theo thứ tự cắt đường tròn  tại . Chứng minh rằng  đồng quy tại một điểm .

**Hướng dẫn giải**

 thuộc đường tròn đường kính  nên  hay 

Tương tự 

Tam giác  có 3 đường cao  đồng quy tại .

Vậy  đồng quy tại một điểm .

**Bài 3:** Cho tam giác ABC vuông ở A. Trên cạnh AC lấy điểm M, dựng đường tròn (O) có đường kính MC. đường thẳng BM cắt đường tròn (O) tại. D. đường thẳng AD cắt đường tròn (O) tại S.

1. Chứng minh ABCD là tứ giác nội tiếp.

2. Chứng minh CA là tia phân giác của góc SCB.

3. Gọi E là giao điểm của BC với đường tròn (O). Chứng minh rằng các đường thẳng BA, EM, CD đồng quy.

4. Chứng minh DM là tia phân giác của góc ADE.

5. Chứng minh điểm M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ADE.

**Hướng dẫn giải**

1. Ta có  ( vì tam giác ABC vuông tại A);  ( góc nội tiếp chắn nửa đường tròn ) =>  như vậy D và A cùng nhìn BC dưới một góc bằng 900 nên A và D cùng nằm trên đường tròn đường kính BC => ABCD là tứ giác nội tiếp.

2. ABCD là tứ giác nội tiếp =>  ( nội tiếp cùng chắn cung AB).

 => =>  (hai góc nội tiếp đường tròn (O) chắn hai cung bằng nhau) => CA là tia phân giác của góc SCB.

TH2 *(Hình b)*

 (cùng phụ  );  (cùng bù  ) => 

=>  =>  => CA là tia phân giác của góc SCB.

3. Xét ΔCMB Ta có BA⊥CM; CD ⊥ BM; ME ⊥ BC như vậy BA, EM, CD là ba đường cao của tam giác CMB nên BA, EM, CD đồng quy.

4. Theo trên Ta có =>  => DM là tia phân giác của góc ADE.(1)

5. Ta có  (nội tiếp chắn nửa đường tròn (O)) =>  .

Tứ giác AMEB có  ;  =>  mà đây là hai góc đối nên tứ giác AMEB nội tiếp một đường tròn => 

Tứ giác ABCD là tứ giác nội tiếp =>  ( nội tiếp cùng chắn cung CD)

=>  => AM là tia phân giác của góc DAE (2)

Từ (1) và (2) ta có M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ADE.

**Bài 4:** Cho đường tròn (O) đường kính AB. Trên đoạn thẳng OB lấy điểm H bất kì ( H không trùng O, B); trên đường thẳng vuông góc với OB tại H, lấy một điểm M ở ngoài đường tròn; MA và MB thứ tự cắt đường tròn (O) tại C và. D. Gọi I là giao điểm của AD và BC.

1. Chứng minh MCID là tứ giác nội tiếp.

2. Chứng minh các đường thẳng AD, BC, MH đồng quy tại I.

3. Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác MCID, Chứng minh KCOH là tứ giác nội

**Hướng dẫn giải**

1.  ( nội tiếp chắn nửa đường tròn ) ….

=>  mà đây là hai góc đối của tứ giác MCID nên MCID là tứ giác nội tiếp.

2. AD, MC, MH là ba đường cao của tam giác BAM nên đồng quy tại I.

3. Chỉ ra KCI là tam giác cân, từ đó 

 . Từ đó chỉ ra  …. (*tự chứng minh*)

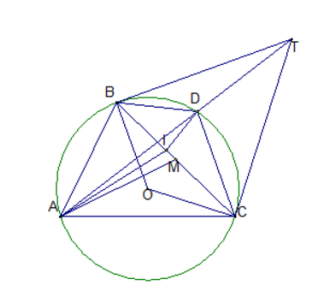
**Bài 5:** Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O;R). Tiếp tuyến tại B và C của đường tròn (O;R) cắt nhau tại T, đường thẳng AT cắt đường tròn tại điểm thứ hai là D khác A.

1.Chứng minh rằng 

2. Chứng minh rằng : AB.CD = BD.AC

**3.** Chứng minh rằng hai đường phân giác góc BAC; BDC và đường thẳng BC đồng quy tại một điểm

**Hướng dẫn giải**



1. Xét tam giác ABT và tam giác BDT có:

 chung

 (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cùng chắn cung BD).

=> (g-g)

2. Có (g-g)



Chứng minh được  (g-g)



Tiếp tuyến tại B và C cắt nhau tại T nên BT = CT (3)

Từ (1), (2), (3) có 

3. Phân giác góc BAC cắt BC tại I, theo tính chất phân giác trong tam giác ta có:



Từ AB.CD = BD.AC 

=> DI là phân giác góc BDC

Do đó hai đường phân giác góc BAC và BDC và đường thẳng BC đồng quy.

**Bài 6:** Cho nửa đường tròn ( O) đường kính AB. Vẽ 2 tiếp tuyến Ax và By. Lấy M trên đường tròn sao cho AM < BM. AM cắt By tại F, BM cắt Ax tại E.

a. Chứng minh: 

b. Tiếp tuyến của đường tròn tại M cắt AE, BF tại C và D. Chứng minh C và D là trung điểm của AE và BF.

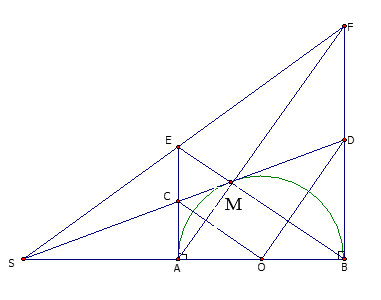
c. Chứng minh các đường thẳng AB, CD, EF đồng quy.

**Hướng dẫn giải**

a. Ta có = 90º (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)AMBE

Xét ∆EAB và ∆ABF có:

 (cùng phụ với )

Suy ra ∆EAB ~ ∆ABF ( g.g)

  AB2 = AE. BF

b. CA = CM và CO là tia phân giác

của 

 ∆AMC cân tại C và CO là đường cao  COAM

Do đó trong ∆ABE có OA=OB, OC//BE nên CA=CE.

c. Gọi giao điểm của AB và EF là S. Ta sẽ chứng minh S, C, D thằng hàng.

Giả sử SC cắt BF tại D’. Vì AE // BF nên theo định lí Ta-let, có:

 D’ là trung điểm của BF

D trùng với D’ hay S, C, D thẳng hàng.

Vậy ba đường thẳng AB, EF, CD đồng quy tại S.

**Bài 7:** Cho tam giác  có ba góc nhọn nội tiếp trong đường tròn .  là trực tâm của tam giác . Vẽ đường kính  của đường tròn ; vẽ  tại .

1. Chứng minh rằng 
2. Gọi  là trọng tâm của tam giác . Chứng minh rằng  thẳng hàng và .
3. Gọi  lần lượt là trung điểm của các cạn . Đường thẳng  qua  song song với , đường thẳng  qua  song song với , đường thẳng  qua  song song với .

Chứng minh rằng các đường thẳng  đồng qui.

**Hướng dẫn giải**

1.  ( là trực tâm của )

 là đường kính nên 



Chứng minh tương tự có: 

Do đó tứ giác  là hình bình hành

Ta có: 

 là trung điểm của 

 là đường trung bình của  nên 

1.  có  là đường trung tuyến,  thuộc đoạn thẳng  và  nên  là trọng tâm của tam giác .  là đường trung tuyến nên  đi qua  và 

Gọi  là giao điểm của  với 

 có ,  là trung điểm của 

 là trung điểm của 

Ta có: 

Do đó  là hình bình hành.

 đi qua trung điểm  của 

Chứng minh tương tự có  đi qua 

Vậy các đường thẳng  đồng quy

**Bài 8:** Trên các cạnh  của tam giác  dựng ra phía ngoài tam giác các hình vuông  và . Chứng minh rằng các đường thẳng  đồng quy.

**Hướng dẫn giải**

*Trường hợp 1:* . Rõ ràng  đồng quy tại .

*Trường hợp 2:* 

Các đường tròn ngoại tiếp hình vuông  và 

Có điểm chung c sẽ cắt nhau tại  (khác )

Ta có:  (góc nội tiếp chắn cung một phần tư đường tròn)

 (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Tương tự: 

Vì tia  nằm giữa hai tia  và ,tia  nằm giữa hai tia  và 

nên 

hay  thẳng hàng.

Chứng minh tương tự  và  thẳng hàng

Vậy  và  cùng đi qua 

Hay  và  đồng quy.

**Bài 9:** Cho đường tròn , đường kính ,  là điểm trên đường tròn ( khác  và ). Kẻ  vuông góc với  ( thuộc ). Đường tròn tâm  đường kính  cắt  và đường tròn  tại 

a) Chứng minh tứ giác  nội tiếp

b) Chứng minh  vuông góc với 

c) Chứng minh các đường thẳng  đồng quy

d) Cho biết sđ. Tính theo  diện tích tứ giác 

**Hướng dẫn giải**

**

*a) Chứng minh tứ giác*  *nội tiếp:*

Ta có:  (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Ta lại có:  (góc nội tiếp cùng chắn cung )

 (cùng phụ với  )

Vậy tứ giác  nội tiếp (góc ngoài tại một đỉnh bằng góc trong của đỉnh đối diện)

*b) Chứng minh* *:*

Ta có:  cân tại  ()

. Mà  ( vuông tại )



 hay 

*c) Chứng minh các đường thẳng*  *đồng quy:*

Gọi  là giao điểm của  và 

 có:  (gt)

 (tính chất đường nối tâm của 2 đtr cắt nhau)

 (đường cao thứ ba trong )

Mà  (câu b)

 thẳng hàng hay đường thẳng  qua .

Vậy các đường thẳng  đồng quy

*d) Tính theo*  *diện tích tứ giác* *:*

Ta có:  vuông tại , 

; 

Ta lại có:  đồng dạng 



**Bài 10:** Cho tam giác vuông tại , là một điểm trên cạnh . Đường tròn đường kính  cắt  ở  và cắt  ở .

a) Chứng minh tứ giác  nội tiếp được trong đường tròn.

b) Chứng minh  là phân giác của góc .

c) Chứng minh  là tâm đường tròn nội tiếp tam giác .

d) Chứng minh  đồng qui.

**Hướng dẫn giải**

a) Chứng minh tứ giác  nội tiếp được trong đường tròn.

Ta có

(góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

( tam giác vuông tại ).

Mặt khác hai đỉnh  cùng nhìn dưới một góc .

Vậy tứ giác  nội tiếp được trong đường tròn.

b) Chứng minh  là phân giác của góc .

Do tứ giác  nội tiếp được trong đường tròn.

Nên  (cùng chắn cung ).

 (cùng chắn cung của đường tròn đường kính ).

.

Vậy  là phân giác của góc .

c) Chứng minh  là tâm đường tròn nội tiếp tam giác .

Chứng minh được tứ giác  nội tiếp được trong đường tròn.

 (cùng chắn cung ).

Mặt khác vì tứ giác  nội tiếp được trong đường tròn.

Nên  (cùng chắn cung ).

  là phân giác của góc .

Mà  cắt  tại . Do đó  là tâm đường tròn nội tiếp tam giác .

d) Chứng minh  đồng qui.

Gọi  là giao điểm của  và .

Ta có (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) .

( tam giác  vuông tại ).

 cóvà  là hai đường cao cắt nhau tại nên là trực tâm của 

 là đường cao của .

Mặt khác (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)  .

Từ  suy ra  thẳng hàng.

Vậy  đồng qui tại .

**Bài 11:** Cho tam giác  vuông tại .Trên cạnh  lấy điểm  không trùng với  và .Vẽ đường tròn đường kính , cắt cạnh  tại .Các đường thẳng  và  lần lượt cắt đường tròn tại các điểm . Chứng minh rằng:

a) . Suy ra .

b) Các tứ giác  và  nội tiếp

c) .

d) Các đường thẳng  đồng quy.

**Hướng dẫn giải**



a) Vì và  chung nên .

Do đó .

b) Vì  nên tứ giác  nội tiếp.

Vì  nên tứ giác  nội tiếp.

c) Ta có:  ( cùng chắn )

 ( cùng chắn )

Suy ra .

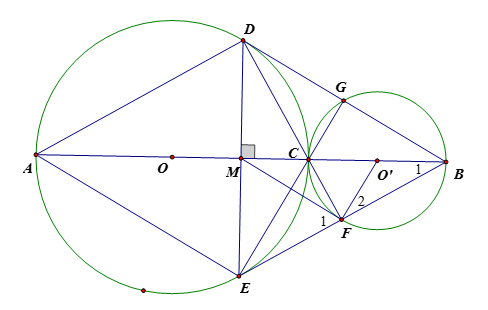
d) Giả sử  cắt  tại . Ta có  là đường cao của tam giác .

 là trực tâm của .

Mà  thẳng hàng. Vậy  đồng quy tại .

**Bài 12:** Hai đường tròn  và  tiếp xúc ngoài tại  gọi AC và BC là hai đường kính đi qua C của đường tròn  và . DE là dây cung của đường tròn  vuông góc với AB tại trung điểm M của AB. Tia DC cắt đường tròn  tại điểm thứ 2 là F  
a) Tứ giác ADBE là hình gì? Vì sao?  
b) Chứng minh ba điểm B, F, E thẳng hàng  
c) DB cắt đường tròn  tại điểm thứ hai là G. Chứng minh DF, EG và AB đồng quy  
d) Chứng minh MF là tiếp tuyến của 

**Hướng dẫn giải**

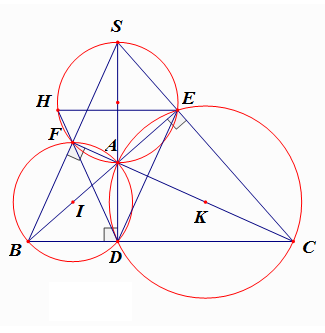


a) Tứ giác ADBE là hình thoi vì AM = MB; MD = ME và   
b) Ta có . Nối BF ta có . Như vậy  và  mà qua B chỉ có duy nhất một đường thẳng song song với DA do đó 3 điểm B, F, E phải thẳng hàng  
c) Ta có CG vuông góc với DB, mặt khác EC vuông góc với DB. Nhưng qua C chỉ tồn tại duy nhất một đường vuông góc với DB nên E, C , G phải thẳng hàng và DF, EG, AB phải đồng quy tại điểm C, chính là trực tâm tam giác EDB  
d) Nhận thấy  và  mà  nên , suy ra . Vậy MF là tia tiếp tuyến của đường tròn tâm O’.

**Bài 13:** Cho ∆ABC (AC > AB,  ). Gọi I, K theo thứ tự là trung điểm của AB, AC. Các đường tròn đường kính AB, AC cắt nhau tại điểm thứ hai D; tia BA cắt đường tròn (K) tại điểmt hứ hai E; tia CA cắt đường tròn (I) tại điểm thứ hai F

1. Chứng minh B, C, D thẳng hàng
2. Chứng minh tứ giác BFEC nội tiép
3. Chứng minh ba đường thẳng AD, BF, CE đồng quy.
4. Gọi H là giao điểm thứ hai của tia DF với đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF, hãy so sánh DH và DE.

**Hướng dẫn giải**

a) ) Áp dụng định lý góc nội tiếp chắn nửa đường tròn, ta có :

; .

Suy ra .

Vậy B, D, C thẳng hàng.

b) Áp dụng định lý góc nội tiếp

chắn nửa đường tròn, ta có:

; ;

suy ra . Khi đó  là hai đỉnh liên tiếp cùng nhìn  dưới một góc bằng nhau.

Vậy tứ giác  nội tiếp.

c) Xét tam giác  có . Suy ra  là ba đường cao. Vậy chúng cắt nhau tại một điểm .

d) Ta có  nội tiếp nên  mặt khác  . (1)

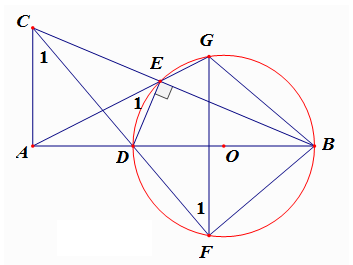
Vận dụng góc nội tiếp, tứ giác nội tiếp ta có: 

  là đường phân giác  (2)

Từ (1) và (2) suy ra  cân tại  suy ra .

**Bài 14**: Cho tam giác ABC vuông tại A và một điểm D nằm giữa A và B. Đường tròn (O) đường kính BD cắt BC tại E. Các đường thẳng CD, AE lần lượt cắt đường tròn (O) tại các điểm thứ hai là F, G. Chứng minh rằng :

1. Các tứ giác ADEC và AFBC nội tiếp
2. AD.AB = AG.AE
3. AC//FG
4. AC, DE và BF đồng quy.

**Hướng dẫn giải**

a)   tứ giác  nội tiếp.

  tứ giác  nội tiếp.

b) Ta có   

c) Tứ giác  nội tiếp  .

Tứ giác  nội tiếp  .

Suy ra .

d)  có  là đường cao   đồng quy.

# **Một số bài tập tự rèn:**

**Bài 1:** Cho hai đường tròn (O) và ( O') cắt nhau tại A, B. Kẻ đường kính AC của (O) cắt đường tròn (O') tại F. Kẻ đường kính AE của ( O') cắt đường tròn (O) tạo G.

Chứng minh:

a) Tứ giác GFEC nội tiếp ;

b) GC, FE, AB đồng quy.

**Bài 2:** Cho đường tròn (O) đường kính AB, gọi I là trung điểm của OA, dây CD vuông góc với AB tại I. Lấy K tùy ý trên dây cung BC nhỏ, AK cắt CD tại H.

1. Chứng minh tứ giác BIHK nội tiếp.
2. Chứng minh AH.AK có giá trị không phụ thuộc vị trí điểm K
3. Kẻ DN  CB, DM  AC. Chứng minh các đường thẳng MN, AB, CD đồng quy.

**Bài 3:** Cho đường tròn (O) đường kính AB, gọi I là trung điểm của OA, dây CD vuông góc với AB tại I. Lấy K tùy ý trên dây cung BC nhỏ, AK cắt CD tại H.

a) Chứng minh tứ giác BIHK nội tiếp.

b) Chứng minh AH.AK có giá trị không phụ thuộc vị trí điểm K

c) Kẻ DN  CB, DM  AC. Chứng minh các đường thẳng MN, AB, CD đồng quy

**Bài 4:** Cho đường tròn (O) đường kính AB, Gọi I là trung điểm OA. Dây CD vuông góc với AB tại I. Lấy K tùy ý trên cung BC nhỏ. AK cắt CD tại H

a, Chứng minh tứ giác BIHK nội tiếp

b, Chứng minh AH.AK có giá trị không phụ thuộc vào vị trí điểm K .

c, kẻ . chứng minh MN,AB, CD đồng quy .

d, Cho BC = 25cm . Hãy tính diện tích xung quanh hình trụ tạo thành khi cho tứ giác MCND quay quanh MD.

***Chúc các em học sinh học tập tốt!***